ESTUDIO DE CASO: ESQUEMAS DE DEMOSTRACIÓN UTILIZADOS POR ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS CUANDO DEMUESTRAN UNA PRUEBA (TEOREMA DE PITÁGORAS)

Cristian Alejandro Guzmán Ruiz, Laura carolina Parra Guerrero, Johan Bohórquez
crisalegu@hotmail.com laurac_2511@hotmail.com, jm_bv@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas- Colombia

Tema: Formación de profesores y maestros.
Modalidad: Comunicación Breve.
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Enfoque cognitivo, Esquemas de demostración, Formación docente, Argumentación.

Resumen

El siguiente informe reporta análisis de estudio que tenía como objetivo clasificar el modelo de demostración que es utilizado por dos estudiantes para profesor de matemáticas (EPPM) de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, al momento de desarrollar un ejercicio propuesto. En este análisis de estudio, se vio la necesidad de llevar a colación y definir el término de razonamiento, debido a la grande confusión con el término de demostración, aunque tienen demasiada relación, ya que la demostración se orienta a todo tipo de razonamiento válido; luego de tener una idea general de la importancia de demostrar, se muestra una clasificación de cada uno de los esquemas adoptados por Harel y Sowder (1998), de los cuales se tuvo en cuenta los esquema de demostración externo, empírico y analítico. Luego de presentar el ejercicio de demostración, se categorizaron ambos producciones de los estudiantes indicando el esquema al cual pertenecen y las dificultades encontradas en cada uno.

Marco de referencia

Es notable en la cotidianidad la utilización de argumentos para que las personas puedan generar convencimiento de acciones y más aún en el área de matemáticas, es así como Acuña (1996) afirma que el uso de argumentos en las matemáticas, toma un rol netamente individual para hacer validos cada uno de las acciones propuestas. Sin embargo, el tipo de razonamiento y los esquemas de demostración tienden a confundirse o a manejarse como un solo concepto utilizado en la actividad matemática. Es por ello que Molfino (2006) muestra y diferencia los dos términos a partir de dos autores (que sí están entrelazados con el pensamiento matemático); el primero, es mencionado por Duval (1992) y se entiende como la organización de proposiciones que se orientan hacia un enunciado dado para luego modificarlo utilizando un campo de conocimientos, mientras que según Balacheff (2000) la actividad de demostración está orienta hacia la aplicación de todo tipo de razonamientos que son válidos establecidos por un conjunto bien definido de reglas.

Si se sigue con este orden de ideas ¿Qué elementos debe tener el razonamiento para que pueda convertirse en demostración? Duval (1999) afirma que el razonamiento genera, en la mayoría de las veces, una argumentación innata y dependiendo al nivel de razonamiento, la demostración toma un rol social que busca aportar entendimiento más que verificar la veracidad de una proposición o enunciado, implicando el descubrir propiedades y argumentaciones integrándose dentro de un sistema de conceptos. Las actividades de demostración se asocian al área de las matemáticas (entendidas como ciencia pura o como un componente cultural) como un eje principal en la apropiación de conceptos, por ello el MEN (1998) toma el término demostración como un elemento importante del contexto matemático (ya sea aritmético, geométrico o algebraico) en diferentes corrientes filosóficas de la matemática.

Ahora bien, para conocer los esquemas respectivos que existen en el campo de la demostración, se requiere una mirada en las categorías que se presentan en un razonamiento lógico para realizar una demostración. Harel y Sowder (1998) proponen unos esquemas de demostración cuyo centro es el convencimiento propio y la persuasión de ese individuo cuando se enfrenta a una situación determinada. Los esquemas que son presentados por los autores son:

Esquemas de demostración. Externos

Este esquema se divide en:

Autoritario: El estudiante se convence (demuestra) solo porque lo vio en un libro e incluso lo que dijo un profesor o compañero el cual considere con más conocimiento.

Rituales: El estudiante considera válido un cambio de enunciado-objeto (razonamiento) por la forma del mismo, sin que se reflexione o se repare el contenido (rigor de la escritura).

Simbólicos: Se usan símbolos sin hacer referencia y dejando atrás las relaciones que tienen con el objeto en cuestión.

Esquemas de demostración empíricos.

Se presentan dos diferenciaciones en la ejemplificación las cuales son:

Perceptivos: La ejemplificación con la seriación de los dibujos es común para este esquema de demostración.

Inductivos: El estudiante no alcanza a generalizar sino por el contrario a particularizar una situación.

Esquemas de demostración analíticos.

Para este esquema se reconocen dos tipos de esquemas: los de transformación y los axiomáticos.

Transformación: Para este tipo de demostración se debe concurrir por estos momentos: Imágenes espaciales, transformación simbólica y construcción.

Axiomático. Es una justificación que se deriva de resultados por consecuencias lógicas anteriores, considerados como válidos.

Aspectos metodológicos

Si bien es cierto, la acción de indagar sobre los procesos y las formas de cómo los seres humanos controlan su pensamiento hace parte del concepto de la Metacognición, pero han sido tantos los estudios y las investigaciones en este campo que se han desarrollado teóricamente conceptos como metaatención, metaaprendizaje, metaconceptos, metarepresentaciones, entre otros (Silva, 1999). En este sentido, en la E.M es vital que se realicen relaciones entre lo que el estudiante piensa y desarrolla con el fenómeno matemático trabajado, para poder explicar (en este mismo sentido) las rutinas y cada una de las estrategias cognitivas que existen en esta acción.

Para Silva (2004) con el solo hecho de hacer una mirada metacognitiva en el proceso de aprendizaje puede establecerse algunos elementos principales dentro del área de estudio transpuesto por el docente:

- Incrementar la conciencia de la naturaleza de cada tarea con sus respectivas tareas.
- Aumentar el control del aprendizaje a partir de la toma de mejores decisiones.
- Asumir una postura responsable sobre los objetivos planteadas en la realización de una tarea presentada al estudiante.
- Preocupación porque los alumnos obtengan un aprendizaje eficiente del objeto trabajado.

Si bien es cierto, se cree que la metacognición radica únicamente (siendo especifico) en los conceptos analíticos del cálculo lo cual es falso ya que todo tipo de aprendizaje es resultado de una acción netamente voluntaria por el individuo; estas decisiones están enmarcadas en un contexto que facilita al individuo a desarrollar procesos cognitivos que son útiles para la obtención del conocimiento (Cruz, 1995). Como ya se mencionó, este estudio buscaba en su gran parte, identificar acciones que realiza el estudiante para validar unas conjeturas propias que debe poner en juego y así mismo validarlas, luego de ser identificadas cada una de las acciones se categorizan de acuerdo a unos esquemas ya establecidos.

En el desarrollo del ejercicio de indagación se hizo uso de dos instrumentos de recolección de información; el primero de ellos fue es a una prueba escrita (Figura 1) que permitió a los estudiantes dar posibles soluciones al problema propuesto.

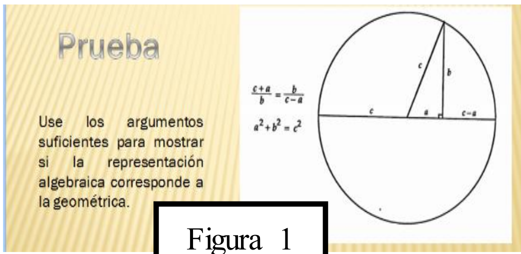

Figura 1

El segundo instrumento remitió directamente a la observación no participativa, con la que se toman los datos que falten en la demostración escrita; tales como ideas, conjeturas verbales y caminos no tomados o descartados en la solución del problema propuesto. Así mismo, el análisis del estudio toma un rumbo cualitativo debido a que trata de identificar la naturaleza de una manifestación (expresada como producciones netamente matemáticas), se escogen unos datos, se categorizan y se interpretan (Martínez, 2006), de manera tal que exista la necesidad de extraer todos los datos posibles a cada una de las dos pruebas aplicadas.

Desarrollo de la prueba.

Descripción de las producciones del Estudiante 1: Algunas consideraciones

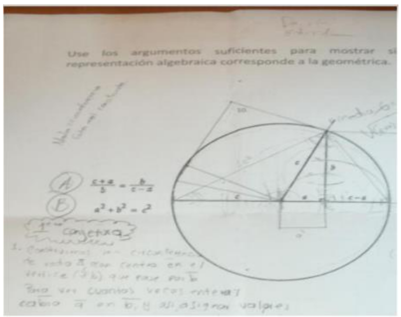

Figura 2

La actividad del estudiante puede dividirse en varios momentos: en el primero, genera una estrategia que consiste en hallar la medida común entre el segmento b y el segmento a, para mirar cuántas veces cabe el menor dentro del mayor (figura 3) esto lo hace con el fin de identificar elementos comunes entre las partes constitutivas (lados en este caso) del triángulo cuyos lados son a, b, c. En un segundo momento, el estudiante se da cuenta que no hay medida común entre estos dos segmentos; para ello, justifica sus procedimientos indicando: "es posible que sea un procedimiento infinito y eso no me va a llevar a ningún lado y menos con la representación algebraica". Es notable que se evidencia una reflexión inválida entre lo que desarrolla (hallar la medida común) y los requerimientos de la representación gráfica (Figura 2).

Figura 3

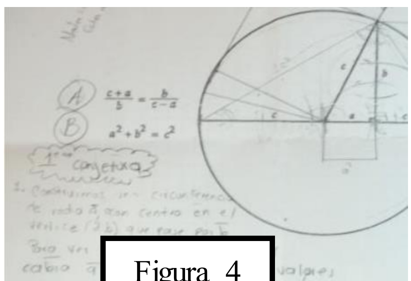

Figura 4

En un tercer momento, cuando este estudiante se da cuenta que no le sirve hallar la medida común, él genera unas expresiones algebraicas desglosadas de las que son visibles en la prueba acercándose a lo que él lo llama una “demostración algebraica” (Figura 4).

Cuando empieza a hacer cada una de las expresiones algebraicas como $a^2 + b^2$ tan solo con decir que esta expresión corresponde a la suma de los cuadrados (en la Figura 3 es visible que dibuja los tres cuadrados).

El estudiante en pocas palabras está utilizando una demostración analítica dada una transformación porque construye otras expresiones como $(a+b)^2$ que hacen parte de otras representaciones del mismo teorema, desarrollando y validando de manera lógica cada uno de los procedimientos hechos. Finalmente, el estudiante realiza una comparación entre lo encontrado y la representación gráfica para establecer la relación de equivalencia entre estas dos, en este momento es cuando el estudiante genera con sus producciones otro esquema de demostración: el empírico perceptivo.

Descripción de las producciones del Estudiante 2: Algunas consideraciones

Este estudiante comienza por generar y transformar la expresión del teorema, es decir, inicia por un camino algebraico. Lo que el estudiante hace es construir y demostrar la igualdad entre razones, para llegar al teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

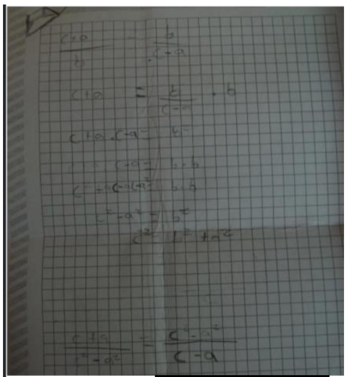

Figura 5

“…Dada la igualdad, $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$

Aplico el inverso multiplicativo al segundo lado de la igualdad para quitar el denominador del primer lado $\frac{c+a}{1} = \frac{b}{c-a}(b)$

Hago el mismo procedimiento, pero esta vez haciendo el inverso multiplicativo de la segunda fracción en el primer lado de la igualdad y opero $\frac{c+a}{1}(c-a) = b^2$

Opero el inverso con el numerador de la primera fracción y me genera la igualdad $c^2 - a^2 = b^2$

Despejo por último aplicando el inverso aditivo del cuadrado del lado a, $c^2 = b^2 + a^2$*…”*

Dado los procedimientos que realiza y a cada una de las justificaciones hechas, el estudiante genera una demostración con forma de ritual, ya que a partir de las nuevas manipulaciones (aritméticas y algebraicas) logra llegar a la igualdad $c^2 = b^2 + a^2$, pero estas manipulaciones no tienen ningún sentido con respecto a la representación geométrica que se le ha presentado y al mismo tiempo no relaciona ninguna de las acciones sobre la igualdad algebraica hecha. Luego de tener la igualdad y por sustitución obtiene la igualdad $a^2 - c^2 = b^2$ la cual es producto de reemplazar en la inicial que era $\frac{c+a}{b}=\frac{b}{c-a}$ y reemplaza el valor de b; no utiliza un procedimiento adecuado pero genera una demostración inductiva ya que particulariza el Teorema a una sola representación y solución. Se puede observar la (figura 5) en el siguiente enlace: https://www.dropbox.com/s/w0362uxlhf5pyie/ESTUDIANTE%202.pd

CONTRASTE CON LAS CATEGORIAS DE ANÁLISIS

De acuerdo con el marco teórico consultado y propuesto, se extrajeron unas características generales resultado del análisis de los datos; para este contraste se va a categorizar las producciones (en general) en su respectivo esquema indicando la característica que pertenece a este esquema, de acuerdo a cada una de las categorías propuestas se encontró que los estudiantes:

- Esquemas de demostración externo

Autoritaria: El estudiante no utiliza argumentos basados en una fuente externa (profesor, compañero) para el convencimiento del problema, utiliza sus ideas intuitivas y pre-conceptos. Por ende no hay producciones que se encuentren en este esquema

Rituales: El estudiante considera válido el enunciado por la forma del mismo sin hacer una reflexión, por ejemplo se evidencia la utilización de la primera razón $(c+a)/b = b/(c-a)$ sin antes haber reflexionado sobre su veracidad se parte de la misma para justificar el resto. (Figura 6)

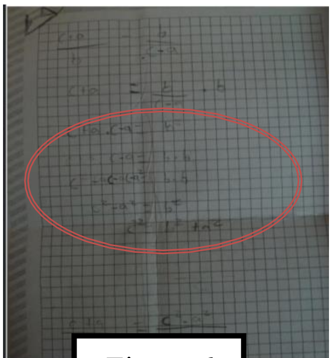

Figura 6

Simbólico: El estudiante nombra segmentos, no se hace una relación entre los mismos y la figura. Para este esquema, el estudiante hace referencia a algunos componentes de la expresión algebraica e intenta nombrar e identificar en la representación geométrica dichos elementos, sin tener en cuenta la relación que va más allá del "como suene y como se vea en la figura.

- Esquemas de demostración empíricos.

Perceptivos: El estudiante nombra segmentos y otros elementos pero no se habla de lo que sucede en ellos dentro de la figura.

Inductivos: No se evidencia la utilización de ejemplos para demostrar la situación, se parte de ideas intuitivas, se desarrollan pero no se alcanza una generalidad. Esto implica que el estudiante si se encuentra realizando y validando sus conjeturas a partir de las características de este esquema (Figura 5 con su respectivo análisis).

- Esquemas de demostración analíticos.

Transformación: se evidencia una justificación y argumentos totalmente válidos y lógicos en cuanto la primera razón $\frac{(c+a)}{b} = \frac{b}{(c-a)}$ y su respectiva procedencia para llegar a la segunda $a^2 + b^2 = c^2$ y demostrar su relación, se hace uso de argumentos de tipo algebraico aun así no se toma en cuenta la gráfica. El estudiante alcanza a hacer algún tipo de transformaciones entre las expresiones algebraicas (Figura 6) y ello permite categorizar las elaboraciones en este esquema.

Axiomáticos: El estudiante no hace visible una conexión entre los razonamientos iniciales y el punto de llegada. No hay nada que indique el uso de argumentos, conexiones o conjeturas validadas para que se encuentren en este esquema.

Conclusiones

- Los esquemas utilizados por los estudiantes fueron la demostración ritual, la inductiva, la empírico-perceptiva y la analítica dada una transformación.
- De manera propositiva y dados los resultados de las pruebas aplicadas, se propone hacer una formación objetiva en el uso de razonamientos lógicos utilizándolos en el área de las matemáticas, desde la Educación Básica si es posible, ya que en cada una de las elaboraciones hechas por los estudiantes se evidenció que al llegar al tercer semestre no alcanzan un rigor en la demostración (axiomática), es decir, no logran construir un lenguaje lógico para validar el razonamiento hecho con relacionándolo con la representación geométrica. En muchas ocasiones intenta utilizar razonamientos lógicos, pero no hay relación con el objeto involucrado.
- La siguiente conclusión es producto de las consultas bibliográficas y el análisis de las mismas y se dice que la demostración es un proceso de construcción propia del individuo y no puede pensarse en “enseñar a demostrar” por el simple hecho del significado (es contradictorio); más bien, es posible que cuando un estudiante no realiza una demostración acorde a su nivel cognitivo (relacionado con el respectivo esquema) es porque no tiene las herramientas suficientes para dar veracidad a cada uno de sus argumentos y no porque “no se la ha enseñado a demostrar”

Bibliografía

Acuña, CM. (1996). *Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y la demostración en el nivel medio superior*. Investigaciones en Educación Matemática Educativa. México, Págs. 93-109. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente. Recuperado de http://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-00520133/document

Cruz, C. (1995). *El uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de la matemática*. Serie Estudios en Educación Matemática. Págs. 1-19. Sociedad chilena de Educación Matemática: Chile.

Duval (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México, México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). *Tipos de justificación de los estudiantes*. *El profesor de matemáticas*, Vol. 91.Pág. 670-675.

Martínez, M. (2006). *La investigación cualitativa (síntesis conceptual)*. Revista IIPSI. Facultad de psicología: Venezuela.

MEN (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Edit. Magisterio.

MEN (2006). *Estándares curriculares para competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Edit. Magisterio.

Molfino, V. (2006). *Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en la geometría?* Instituto Politécnico nacional. Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada: Distrito Federal.

Silva, C. (1999). *Variables metacognitivas en el aprendizaje matemático*. Memorias de la V Conferencia Internacional de Ciencias de la Educación. Camagüey: Cuba

Silva, C. (2006). *Educación en matemática y procesos metacognitivos en el aprendizaje*. Revista del Centro de Investigación. Págs. 81-91. Universidad La Salle: Colombia.